المحاضرة الخامسة الرابعة:

مثال: أوجد حل المعادلة $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y = 0$ (1)

في المنطقة $y > 0$ وتحقق الشروط التالية:

$$u|_{x=1} = y \ , \ u_x|_{x=1} = y \quad (2)$$

الحل:

$$A = x^2 \ , \ 2B = 0 \ , \ C = -y^2$$

$$B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$$

المعادلة من النمط الزائدي.

المعادلة المميزة:

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0$$

$$(x\,dy - y\,dx)(x\,dy + y\,dx) = 0$$

$$L_1 : x\,dy + y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln c_1$$

$$\ln(xy) = \ln c_1 \Rightarrow$$

$$yx = c_1$$

$$L_2 : x\,dy - y\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln y - \ln x = \ln c_2 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln c_2 \Rightarrow \frac{y}{x} = c_2$$

$$\xi = xy \ , \ \eta = \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2\eta} u_\xi = 0$$

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[u_\eta + \frac{1}{2\eta}u\right] = 0$$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد:

$$u_\eta + \frac{1}{2\eta}u = \psi_1(\eta)$$

بتثبيت ξ نحصل على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

التابع المجهول هو u والمتحول المستقل هو η والعامل التكاملي هو:

$$\mu(\eta) = e^{\int \frac{1}{2\eta} d\eta} = e^{\frac{1}{2}\ln\eta} = e^{\ln \eta^{\frac{1}{2}}} = \eta^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\eta^{\frac{1}{2}} . u\right]' = \psi_1(\eta) . \eta^{\frac{1}{2}}$$

بالمكاملة بالنسبة لـ η:

$$\eta^{\frac{1}{2}} . u = \int \psi_1(\eta)\, \eta^{\frac{1}{2}} d\eta + \varphi(\xi)$$

$$\eta^{\frac{1}{2}} u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

وبالتالي فإن الحل العام:

$$u = \eta^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi(\xi) + \psi(\eta)\right]$$

بالعودة للمتحولات القديمة:

$$u(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi(y . x) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] \quad (4)$$

لإيجاد الحل الخاص:

$$u_x = \frac{-1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\left[\varphi(y . x) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] +$$

$$+ \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[y . \varphi'(x . y) - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\left(\varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\left[\varphi'(xy) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{x^2}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\right] \quad (4)'$$

من (2) و (4) و '(4) نجد:

$$(2),(4) \Rightarrow y = y^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi(y) + \psi(y)\right] \Rightarrow$$

$$\varphi(y) + \psi(y) = y^{\frac{3}{2}} \qquad (5)$$

$$y = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi(y) + \psi(y)\right) + y^{\frac{1}{2}}\left[\varphi'(y) - \psi'(y)\right]$$

$$y = \frac{1}{2} y + y^{\frac{1}{2}}\left[\varphi'(y) - \psi'(y)\right] \Rightarrow$$

$$y^{\frac{1}{2}}\left[\varphi'(y) - \psi'(y)\right] = \frac{1}{2} y$$

$$\varphi'(y) - \psi'(y) = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (6)$$

نشتق العلاقة (5) بالنسبة لـ y نحصل على

$$\varphi'(y) + \psi'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \qquad (5)'$$

$$2\varphi'(y) = 2y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \psi'(y) = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(y) = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \quad \ldots (7)$$

نبدل (7) في (5) نحصل على:

$$\psi(y) = y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} = \psi(y) \quad \ldots (8)$$

نبدل في العلاقة (7) كل y بـ xy نحصل على:

$$\varphi(xy) = \frac{2}{3}(xy)^{\frac{3}{2}}$$

نبدل في العلاقة (8) كل y بـ $\frac{y}{x}$ نجد:

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Royal

الموضوع : .... التاريخ : / / ٢٠

نبدل في $\psi\left(\frac{y}{x}\right), \varphi(xy)$ عما يساويها في عبارة الحل العام فنحصل على عبارة الحل الخاص المطلوبة:

$$u(x,y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$u(x,y) = \frac{2}{3}x^2 y + \frac{1}{3}\cdot\frac{y}{x}$$

وهو الحل الخاص.

مثال: أوجد حل المعادلة:

$$u_{xt} + t\,u_x + x\,u_t + xt\,u = 0 \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{t=3x} = 0 \quad , \quad u_t\big|_{t=3x} = e^{-5x^2} \quad (2)$$

هذه المعادلة من النمط الزائدي لأنها تحتوي على الحد المختلط u_{xt} (وهي في الشكل النموذجي)

المعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_x + xu\right] + t\left[u_x + xu\right] = 0$$

نفرض $u_x + xu = v$

$$v_t + t\,v = 0$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{dv}{v} = -t\,dt$$

$$\ln\frac{v}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2}t^2$$

$$y' + P(x) y = \varphi(x)$$
$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠

$$\Rightarrow v = \varphi_1(x) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

نبدل v بما يساويها:

$$u_x + x.u = \varphi_1(x) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

نثبت t نحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى

لها عامل تكامل هو:

$$\mu(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل نحصل على معادلة تامة تكتب بالشكل:

$$\left[e^{\frac{1}{2}x^2} . u\right]' = \varphi_1(x) e^{\frac{1}{2}x^2} . e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$e^{+\frac{1}{2}x^2} . u = e^{-\frac{1}{2}t^2} \int \varphi_1(x) e^{\frac{1}{2}x^2} dx + \psi(t)$$

$$u(x,t) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)} \varphi(x) + \psi(t) . e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (3)$$

علماً أن φ دالة تابعة لـ x فقط و ψ تابعة لـ t فقط.

نشتق العلاقة (3) بالنسبة لـ t:

$$u_t = -t \, e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)} \varphi(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi'(t) \quad (3)'$$

من (3) و $(3)'$ و (2):

$$0 = e^{-5x^2} \varphi(x) + \psi(3x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad , \quad (4)$$

$$e^{-5x^2} = -(3x) e^{-5x^2} . \varphi(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi'(3x)$$

بالاستفادة من العلاقة (4) العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل

$$e^{-5x^2} = +(3x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi(3x) + e^{-\frac{1}{2}x^2} . \psi'(3x)$$

Royal

$$\Psi'(3x)+(3x)\Psi(3x)=e^{-\frac{9}{2}x^2}=e^{-\frac{1}{2}(3x)^2}$$

وبالتالي حصلنا على معادلة تفاضلية خطية تابعة لمجهول هو $\Psi(x)$ والتابع لمتحول مستقل هو $(3x)$:

نفرض: $3x=X \Rightarrow \Psi'(X)+X\Psi(X)=e^{-\frac{1}{2}X^2}$

وهي معادلة تفاضلية خطية تابعة لمجهول هو $\Psi(X)$ والمتحول هو X نوجد عامل التكميل:

$$\mu(X)=e^{\int X\,dx}=e^{\frac{1}{2}X^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنحصل على معادلة تامة:

$$\left[e^{\frac{1}{2}X^2}\Psi(X)\right]'=1 \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}X^2}\Psi(X)=X \Rightarrow$$

$$\Psi(3x)=3x\,e^{-\frac{1}{2}(3x)^2} \quad \dots(5)$$

نبدل (5) في (4) فنحصل على:

$$0=e^{-5x^2}\varphi(x)+3x\,e^{-\frac{1}{2}(3x)^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$0=e^{-5x^2}\varphi(x)+3x\,e^{-5x^2}$$

$$\varphi(x)=-3x \quad \dots(6)$$

نبدل في العلاقة (5) كل $3x$ بـ t فنحصل على:

$$\Psi(t)=t\,e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (7)$$

ثم نبدل (6) و (7) في عبارة الحل العام (3) فنحصل على الحل الخاص

$$u(x,t)=-3x\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)}+t\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)}$$

$$u(x,t)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)}\cdot\left[t-3x\right]$$

وهو الحل الخاص المطلوب.

Royal

طريقة الموجات المنتشرة: استنتج علاقة دالامبير

معادلة الذبذبات المتجانسة (علاقة دالامبير) نظرية مهم

أوجد حل معادلة الذبذبات المتجانسة لوتر لانهائي والتي تأخذ الشكل التالي

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) , \qquad u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad (2)$$

الحل: المعادلة المعطاة من النمط الزائدي:

$$A = -a^2 , \; 2B = 0 , \; C = 1$$

$$B^2 - AC = 0 + a^2 = a^2 > 0$$

المعادلة من النمط الزائدي والمعادلة المميزة:

$$A\,dt^2 - 2B\,dx\,dt + C\,dx^2 = 0$$

$$-a^2 dt^2 + dx^2 = 0$$

$$(dx + a\,dt)(dx - a\,dt) = 0$$

إما: $dx + a\,dt = 0 \Rightarrow x + at = c_1$

أو: $dx - a\,dt = 0 \Rightarrow x - at = c_2$

نجري التحويل: $\xi = x + at , \; \eta = x - at$ (3)

$$\xi_x = 1 , \; \xi_t = a , \; \xi_{xx} = \xi_{xt} = \xi_{tt} = 0$$

$$\eta_x = 1 , \; \eta_t = -a , \; \eta_{xx} = \eta_{xt} = \eta_{tt} = 0$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\,\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\,\eta_x^2 + 0$$

$u_{tt} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

$u_{tt} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_t^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_t \eta_t + u_{\eta\eta} \cdot \eta_t^2 + 0$

$u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}$

نعوض في المعادلة :

$a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} - a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} - a^2 u_{\eta\eta} = 0$

$-4a^2 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$

$\frac{\partial}{\partial \xi}[u_\eta] = 0$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد :

$u_\eta = g_1(\eta)$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد :

$u(\xi,\eta) = \int g_1(\eta)\, d\eta + f(\xi)$

$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$

$[u(x,t) = f(x+at) + y(x-at)]$ --- (4)

$u_t = a \cdot f'(x+at) - a y'(x-at)$ ... (4)'

من (1) و (4)' و (2) :

$\varphi(x) = f(x) + y(x)$ ___ (5)

$\psi(x) = a f'(x) - a y'(x)$

$\frac{1}{a} \psi(x) = f'(x) - y'(x)$ ___ (6)

$\varphi'(x) = f'(x) + y'(x)$ (5)'

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠

بجمع (6) مع (5) نجد:

$$\frac{1}{a}\psi(x) + \varphi'(x) = 2f'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2a}\psi(x) \quad \int$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi \qquad (7)$$

نبدل في (7) كل

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)$$

$$f(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

$$g(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\xi)\,d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \left\{\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} \psi(y)\,dy + \int_{x-at}^{0} \psi(\xi)\,d\xi\right]\right\}$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

معادلة دالامبير

ملاحظة

يمكن التعبير عن الحل (علاقة دالامبير) في صورة المجموع

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

حلاً ان في الأعراف الابتدائية

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right]$$

الموضوع :   التاريخ :   /   / ٢٠

والسرعة الابتدائية هو:

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz$$

معادلة الذبذبات الغير متجانسة:

أوجد حل معادلة الذبذبات غير المتجانسة:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,t)$$

والمحققة للشروط الابتدائية:

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=\varphi(x)\\ u_t(x,0)&=\psi(x)\end{aligned}\right\};\ -\infty<x<+\infty$$

$$W_f(x,t,\tau)$$

الحل: نفرض أن: حل مسألة كوشي المساعدة.

$$\frac{1}{a^2}(W_f)_{tt}=(W_f)_{xx}\ ;\ t>\tau\ ,\ -\infty<x<+\infty \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}W_f(x,\tau,\tau)&=0\\ \frac{\partial W_f(x,\tau,\tau)}{\partial\tau}&=f(x,\tau)\end{aligned}\right\}\ t=\tau\ ,\ -\infty<x<\infty \quad (4)$$

وتعطينا علاقة دالامبير:

$$W_f(x,t,\tau)=W_f(x,t-\tau,\tau).$$

$$W_f=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi \quad (5)$$

Royal

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = f(x,\beta(x))\,\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dy\right.$$

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠

حل هذه المسألة الساعدة نعطي من علاقة دالاميبر وهي ومن جهة أخرى نكتب علاقة دالاميبر بالصورة الآتية:

$$u(x,t) = \frac{\partial W_f(x,t,0)}{\partial \tau} + W_f(x,t,0) \quad \dots (6)$$

علماً أن:

$$W_f = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

و: $$W_\varphi(x,t,0) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\,d\xi$$

هما حلا المسألة المتجانسة (كوشي) عند $\tau = 0$: (u1,13)

و $f = \psi(x)$, $f = \varphi(x)$ على الترتيب وإن عملية التفاضل مباشرة توضح أن:

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2a}\left[\varphi(x+at)(a) - \varphi(x-at)(-a) + \int_{x-at}^{x+at} 0 \cdot d\xi\right] = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

(مشتق الثابت)

والآن سوف نثبت أن حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية:

$u_t(x,0) = 0$, $u(t,0) = 0$

يعطى بالصورة:

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠

$$u(x,t) = a^2 \int_0^t w_f(x,t,\tau)\, d\tau \quad ...(7)$$

وبعبارة أخرى وهو يمثل الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

نشتق العلاقة (7) بالنسبة لـ t :

$$u_t = a^2 w_f(x,t,t)\overset{\text{مشتق}}{(1)} + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f(x,t,\tau)}{\partial t}\, d\tau$$

وبالاعتماد على الشروط (4) عند $t=\tau$:

$$u_t = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f(x,t,\tau)}{\partial t}\, d\tau$$

$$u_{tt} = a^2 \frac{\partial w_f(x,t,t)}{\partial t}(1) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f(x,t,\tau)}{\partial t^2}\, d\tau$$

$$u_{tt} = a^2 f(x,t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f(x,t,\tau)}{\partial t^2}\, d\tau$$

نشتق (7) بالنسبة لـ x :

$$u_x = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f(x,t,\tau)}{\partial t}\, d\tau$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}\, d\tau$$

بالاعتماد على العلاقة (3) نكتسب الشكل :

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}\, d\tau$$

$$f(x,t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}\, d\tau + f(x,t)$$

وبالتالي فإن (7) تمثل حل خاص للمعادلة المعطاة .

وبالتالي نستنتج مباشرة أنه يمكن التعبير عن حل المسألة

المطروحة (١)، (٢) هو الشكل التالي:

$$u(x,t) = \frac{\partial U_\varphi(x,t,0)}{\partial t} + W_\varphi(x,t,0) + a^2\int_0^t W_f(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{a^2}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

وهو حل معادلة الذبذبات غير المتجانسة

مثال: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 4xt \quad \dots (1)$$

$$u|_{t=0} = x^2 , \quad u_t|_{t=0} = x$$

يجب أن يكون أمثال u_{xx} واحد

حل هذه المسألة يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

حيث أن: $\varphi(x) = x^2, \ \psi(x) = x, \ f(x,t) = x\,t \ , \ a = 2$

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(x-at)] = \frac{1}{2}[\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t)]$$

نبدل كل x بـ $x-2t$

$$= \frac{1}{2}[(x+2t)^2 + (x-2t)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\{x^2 + 4tx + 4t^2 + x^2 - 4tx + 4t^2\}$$

$$= x^2 + 4t^2$$

Royal

الموضوع : .... التاريخ : / / ٢٠

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\xi\,d\xi = \frac{1}{8}\,\xi^2\Big|_{x-2t}^{x+2t}$$

$$= \frac{1}{8}\left[(x+2t)^2-(x-2t)^2\right] = \frac{1}{8}\{8xt\} = xt$$

$$\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = \int_0^t\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \xi\cdot\tau\,d\xi\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \tau\left[\xi^2\right]_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \tau\left[(x+2(t-\tau))^2-(x-2(t-\tau))^2\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t 2\left[8x(t-\tau)\right]d\tau = 4x\int_0^t\left[t\cdot\tau-\tau^2\right]d\tau$$

~~$= 4x\left[\frac{1}{2}t\cdot\tau^2-\frac{1}{3}\tau^3\right]_0^t$~~ $= 4x\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t\right.$

$$= 4x\left[\frac{1}{2}t\cdot\tau^2\right]_0^t = 4x\left(\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3\right) = 4x\left(\frac{1}{6}t^3\right)$$

$$= \frac{2}{3}xt^3$$

$$u(x,t) = x^2+4t^2+xt+\frac{2}{3}xt^3$$

وهو حل المعادلة المطلوبة.